

# Apprentissage d'équilibres de Nash pour l'ordonnancement de tâches

Johanne Cohen

PRiSM/CNRS, Versailles, France.

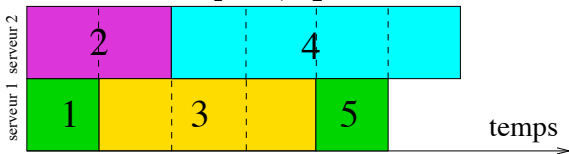
Travail commun avec D. Barth, O. Bournez et O. Bousaton

# Allocation de tâches

- $m$  machines
- $n$  tâches ayant pour poids  $\{w_1, \dots, w_n\}$
- $S_i$  : ensemble des machines pouvant héberger la tâche  $i$
- $L_j$  = Charge de la machine  $j$
- **Problème classique** : minimiser le temps de fin d'exécution de la dernière tâche

Par exemple : 2 machines identiques, 5 tâches

une affectation  $L_1 = 5, L_2 = 6$



# Allocation de tâches

- $m$  machines
- $n$  tâches ayant pour poids  $\{w_1, \dots, w_n\}$

ensemble de joueurs

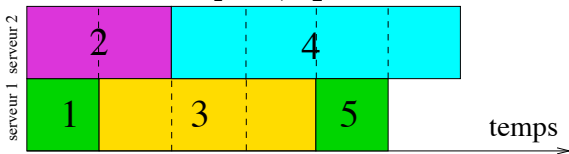
- $S_i$  : ensemble des machines pouvant héberger la tâche  $i$

ensemble de stratégies

- $L_j =$  Charge de la machine  $j$
- **Problème classique** : minimiser le temps de fin d'exécution de la dernière tâche

Par exemple : 2 machines identiques, 5 tâches

une affectation  $L_1 = 5, L_2 = 6$

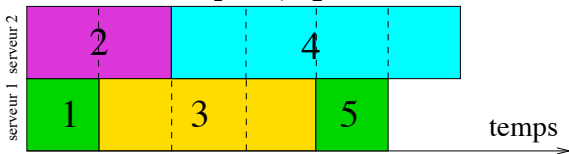


# Allocation de tâches

- $m$  machines
- $n$  tâches ayant pour poids  $\{w_1, \dots, w_n\}$   
ensemble de joueurs
- $S_i$  : ensemble des machines pouvant héberger la tâche  $i$   
ensemble de stratégies
- $L_j =$  Charge de la machine  $j$
- Au point de vue de la théorie des jeux : minimiser le coût (charge) du joueur  $i$

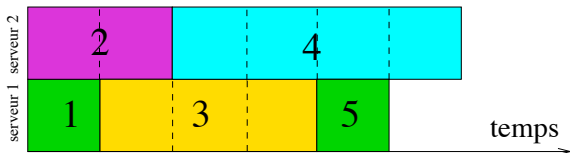
Par exemple : 2 machines identiques, 5 tâches

une affectation  $L_1 = 5, L_2 = 6$



# Exemple : allocation de tâches

- 2 machines, 5 tâches,
- Une affectation :



- Coût :

tâche	coût
1	5
3	5
5	5

tâche	coût
2	6
4	6

- Une tâche peut-elle diminuer son coût ?

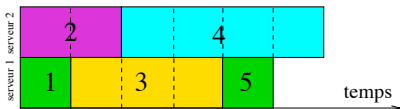
**NON**

# Equilibre de Nash pur

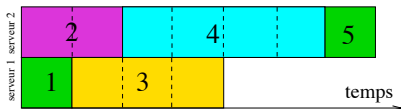
Stratégie pure pour un joueur  $i$  : choix d'une machine  $j$ .

Une affectation de  $n$  tâches est un **équilibre de Nash pur** si pour toutes les tâches  $i$ ,

Si  $i$  est affecté à la machine  $j$  et si  $i$  peut être affecté à la machine  $k$  alors  $L_i \leq L_k + w_i$



Equilibre de Nash



¬ Equilibre de Nash

# Équilibre de Nash mixte

Stratégie mixte pour un joueur  $i$  : choix d'une distribution de probabilité  $q_i$  sur les machines.

Une affectation de  $n$  tâches est un **équilibre de Nash mixte** si pour toutes les tâches  $i$ ,

Si  $i$  est affecté selon la distribution  $q_i$ , et  
si pour tout autre distribution  $q'_i$  pour  $i$  alors

$$E_{q_i, q_{-i}}[L] \leq E_{q'_i, q_{-i}}[L].$$

**Théorème [Nash 51]**

Tout jeu possède un équilibre mixte.

# Plan de l'exposé

Ordonnancement de tâches

Résultats connus

Dynamique

Version stochastique

Autre dynamique

Etape 1

Etape 2

Etape 3

Conclusion



# 1. Résultats connus

# Existence d'un équilibre de Nash.

Théorème [Fotakis2002,Even-Dar2003]

Les jeux considérés de cet exposé possèdent toujours un équilibre de Nash pur.

# Existence d'un équilibre de Nash.

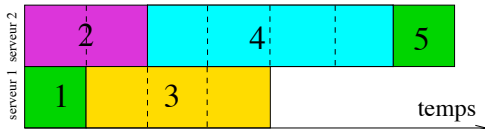
Théorème [Fotakis2002,Even-Dar2003]

Les jeux considérés de cet exposé possèdent toujours un équilibre de Nash pur.

Preuve :

1. Soit  $M$  une affectation et  $\{(L_j)\}$  les charges des machines
2.  $\bar{v}(M) = \{L_1, L_2, \dots, L_m\}$  avec

$$L_1 \geq L_2 \geq \dots \geq L_m$$



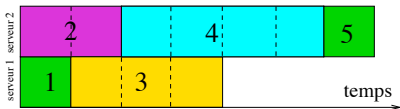
$$\begin{aligned} L_1 &= 4 \\ L_2 &= 7 \\ \bar{v}(M) &\rightarrow (7, 4) \end{aligned}$$

# Suite de la preuve (1/2)

## Remarque :

Si la tâche  $i$  veut migrer de la machine  $j$  vers  $k$ , alors on est dans la situation

- $j < k$ .
- $L_j \searrow$  et  $L_k \nearrow$
- $\bar{v}(M) > \bar{v}(M_1)$  avec  $M_1 = M \oplus$  la tâche  $i$  est sur la machine  $k$ .



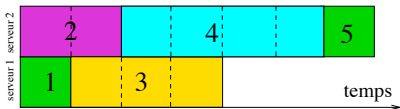
$$M$$
$$\bar{v}(M) = (7, 4)$$

# Suite de la preuve (1/2)

## Remarque :

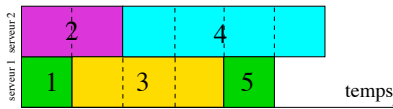
Si la tâche  $i$  veut migrer de la machine  $j$  vers  $k$ , alors on est dans la situation

- $j < k$ .
- $L_j \searrow$  et  $L_k \nearrow$
- $\bar{v}(M) > \bar{v}(M_1)$  avec  $M_1 = M \oplus$  la tâche  $i$  est sur la machine  $k$ .



$$M$$
$$\bar{v}(M) = (7, 4)$$

→



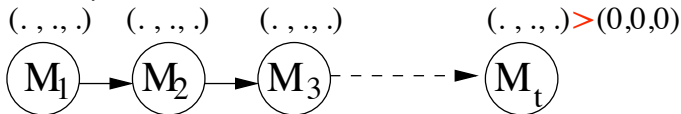
$$M_1$$
$$\bar{v}(M_1) = (6, 5)$$

La tâche 5 migre.

## Suite la preuve (2/2)

### Algorithme :

1. Soit  $M$  une affectation,  $L_1 \geq L_2 \geq \dots \geq L_m$
2.  $t \leftarrow 1$  et  $M_0 \leftarrow M$
3. Tant qu' $\exists$  une tâche  $j$  qui veut migrer de  $i$  vers  $k$  dans  $M_t$ , faire
  - 3.1  $M_{t+1} \leftarrow M_t \oplus$  déplacement de  $j$  de  $i$  vers  $k$
  - 3.2  $t \leftarrow t + 1$
4.  $M_t$  est un équilibre de Nash.



- Existence d'un équilibre de Nash pur sur le jeu d'allocation
- Calcul polynomial d'un équilibre de Nash pur (Algorithme de LPT) [Fotakis et al.2002]
- Étude d'un coût social grâce au prix de l'anarchie

$$\text{Prix de l'anarchie} = \max_{\text{Equilibre de Nash } E} \frac{\text{Cout}(E)}{\text{OPT}}$$

	Machines Identiques	Unif. Reliées
Pur	$2 - \frac{1}{m}$	$\Theta\left(\frac{\log m}{\log \log m}\right)$
Mixte	$\Theta\left(\frac{\log m}{\log \log m}\right)$	$\Theta\left(\frac{\log m}{\log \log \log m}\right)$

- 1999 : Koutsoupias & Papadimitriou
- 2001 : Mavronicolas & Sirakis
- 2002 : Czumaj & Vöcking

## 2. Dynamiques du jeu



- $n$  joueurs, avec un nombre fini de stratégies.
- Le jeu est répété :

A chaque top  $t$  , les joueurs choisissent leurs stratégies.

- Le système peut-il converger vers un équilibre de Nash ?

On cherche à “apprendre” les équilibres de Nash.

# Problème à résoudre

- $q_i(t)$  : stratégie employée par joueur  $i$  au temps  $t$ .
- Algorithme d'apprentissage :

$$q_i(t+1) = \text{Algorithme}(\{q_j(t')\}_{j \text{ joueur}, t' \leq t})$$

- Le problème : Déterminer un algorithme d'apprentissage tel que, pour tout  $i$ ,

$$\text{lorsque } t \rightarrow \infty, q_i(t) \rightarrow q_i^*$$

où  $(q_1^*, \dots, q_N^*)$  est un N.E

- Quels équilibres de Nash ?
  - Equilibre de Nash particulier / Equilibres de Nash purs / Equilibres de Nash mixtes
  
- Qu'est ce qu'un algorithme ?
  - Algorithme Centralisé/Distribué.
  
- Jeu à information complète/incomplète :
  - quelles sont les connaissances des joueurs ?

### 3. Une première dynamique

Théorème [Even-Dar et al 2003]

La dynamique suivante :

- chaque joueur joue l'un à près l'autre ;
- chaque joueur  $i$ , lorsque c'est son tour, migre sa tâche vers la machine de charge minimale, s'il améliore son coût.

atteint ultimement un équilibre de Nash pur.

Théorème [Even-Dar et al 2003]

La dynamique suivante :

- chaque joueur joue l'un à près l'autre ;
- chaque joueur  $i$ , lorsque c'est son tour, migre sa tâche vers la machine de charge minimale, s'il améliore son coût.

atteint ultimement un équilibre de Nash pur.

Preuve inspirée de l'existence d'un équilibre de Nash.

- Un état est défini par un vecteur et par une norme
- Chaque déplacement permet de décroître la norme du nouveau état.

# Extensions de ces résultats [Even-Dar et al 2003]

## Extension du précédent résultat

1. au modèle “machines identiques”, “unif. reliées”, “général”.
2. la sélection de joueurs peut se réaliser en fonction de différents critères comme l'ordre FIFO, un ordre sur les longueurs des tâches, sur la charge des machines...

## Résultats :

- Convergence vers un équilibre de Nash pur.
- Borne sur le nombre de d'étapes pour l'atteindre.

## 4. Une version stochastique



# Dynamique stochastique de [Berenbrink et al 2006]

Faire en parallèle pour chaque tâche (unitaire)  $i$

1. Soit  $j$  la machine hébergeant  $i$
2. Choisir aléatoirement uniformément une machine  $\ell$
3. si  $L_\ell(t) < L_j(t)$  alors
  - 3.1 migrer la tâche  $i$  de  $j$  vers  $\ell$  avec une probabilité  $1 - \frac{L_j(t)}{L_\ell(t)}$

En utilisant cette politique, le système atteint un  $\epsilon$ -équilibre de Nash en un temps espéré de  $O(\log \log n + m^4)$  .

# Dynamique stochastique de [Berenbrink et al 2006]

Faire en parallèle pour chaque tâche (unitaire)  $i$

1. Soit  $j$  la machine hébergeant  $i$
2. Choisir aléatoirement uniformément une machine  $\ell$
3. si  $L_\ell(t) < L_j(t)$  alors
  - 3.1 migrer la tâche  $i$  de  $j$  vers  $\ell$  avec une probabilité  $1 - \frac{L_j(t)}{L_\ell(t)}$

En utilisant cette politique, le système atteint un  $\epsilon$ -équilibre de Nash en un temps espéré de  $O(\log \log n)$  ( $n \gg m$ ).

## 5. Autre dynamique :

convergence vers des  
équilibres mixtes

# Algorithme LRI [Sastry et al. 94]

$q_i(t)$  : vecteur de distribution de probabilité sur  $S_i$  au temps  $t$ .

Algorithme (LRI= Linear Reward Inaction) [Sastry et al. 94]

- $q_i(0)$  vecteurs quelconques, pour tout  $i$ .
- Faire en parallèle pour chaque tâche  $i$ 
  1. Choisir une machine  $j = (a_i(t))$  selon stratégie mixte  $q_i(t)$ .
  2. On obtient un profit  $r_i(t) = 1 - c_i(t)$ .
  3. Mettre à jour  $q_i(t)$  selon

$$q_i(t+1) = q_i(t) + br_i(t) \begin{pmatrix} -q_{i,1}(t) \\ \vdots \\ 1 - q_{i,j}(t) \\ \vdots \\ -q_{i,m_i}(t) \end{pmatrix}$$

◀ Exemple

# Algorithme LRI [Sastry et al. 94]

$q_i(t)$  : vecteur de distribution de probabilité sur  $S_i$  au temps  $t$ .

Algorithme (LRI= Linear Reward Inaction) [Sastry et al. 94]

- $q_i(0)$  vecteurs quelconques, pour tout  $i$ .
- Faire en parallèle pour chaque tâche  $i$ 
  1. Choisir une machine  $j = (a_i(t))$  selon stratégie mixte  $q_i(t)$ .
  2. On obtient un profit  $r_i(t) = 1 - c_i(t)$ .
  3. Mettre à jour  $q_i(t)$  selon

$$q_i(t + 1) = q_i(t) + br_i(t)(e_j - q_i(t))$$

avec  $b$  paramètre.

◀ Exemple

3 étapes.

- Etape 1 : De discret vers continu.
- Etape 2 : Analyse du système continu.
- Etape 3 : Convergence du système continu.

- $Q(t) = (q_1(t), \dots, q_n(t)) \in K$ .

$$K = \left\{ \begin{array}{l} Q \in [0, 1]^{m_1 + \dots + m_n} \mid Q = (q_1, \dots, q_n), \\ q_i \text{ vecteur de probabilité de dimension } m_i \end{array} \right\}$$

- Dynamique de la forme :

$$Q(t + 1) = Q(t) + bG(Q(t), a(t), c(t)).$$

où

- $a(t) = (a_1(t), \dots, a_n(t))$  machines choisies au temps  $t$ .
- $c(t) = (c_1(t), \dots, c_n(t))$  coûts correspondants.
- $G(\cdot)$  la dynamique donnée par l'équation de mise à jour précédente.

# Théorème 1 [Sastry et al. 94].

- On étend  $Q : \mathbb{N} \rightarrow K$  en  $Q^b : \mathbb{R} \rightarrow K$ , par

$$Q^b(t) = Q(k), t \in [kb, (k+1)b[.$$

- On s'intéresse à la limite de  $Q^b(\cdot)$ , lorsque  $b \rightarrow 0$ .
- Posons  $g(Q) = E[G(Q(t), a(t), c(t)) | Q(t) = Q]$ .

**Définition :** une suite  $Q_n$  de mesures converge faiblement vers  $Q$ , si  $E[f(Q_n)] \rightarrow E[f(Q)]$  pour toute fonction  $f(\cdot)$  continue et bornée.



# Théorème 1 [Sastry et al. 94].

Théorème [Théorème 1. de [Sastry et al. 94] ]

Soit  $X_0 = Q^b(0) = Q(0)$ . La suite  $Q^b(\cdot)$  converge faiblement lorsque  $b \rightarrow 0$  vers  $X(\cdot)$  solution de l'équation différentielle

$$\frac{dX}{dt} = g(X), \quad X(0) = X_0.$$

- Preuve : Théorème 3.2 de Kushner, "Approximation and Weak Convergence Methods for Random Processes, with Applications to Stochastic Systems Theory".

# Théorème 1 [Sastry et al. 94].

Théorème [Théorème 1. de [Sastry et al. 94] ]

Soit  $X_0 = Q^b(0) = Q(0)$ . La suite  $Q^b(\cdot)$  converge faiblement lorsque  $b \rightarrow 0$  vers  $X(\cdot)$  solution de l'équation différentielle

$$\frac{dX}{dt} = g(X), \quad X(0) = X_0.$$

- Preuve : Théorème 3.2 de Kushner, "Approximation and Weak Convergence Methods for Random Processes, with Applications to Stochastic Systems Theory".

L'étude de la limite de la dynamique se ramène à l'étude de l'équation différentielle.

## Etape 2 : Etude du système continu

# Etude de l'équation différentielle

Théorème [Théorème 1. de [Sastry et al. 94] ]

Soit  $X_0 = Q^b(0) = Q(0)$ . La suite  $Q^b(\cdot)$  converge faiblement lorsque  $b \rightarrow 0$  vers  $X(\cdot)$  solution de l'équation différentielle

$$\frac{dX}{dt} = g(X), \quad X(0) = X_0.$$

**Par conséquence :** Composante par composante

$$\frac{dq_{i,\ell}}{dt} = g(Q)_{i,\ell} \text{ avec}$$

$$g(Q) = E[G(Q(t), a(t), c(t)) | Q(t) = Q]$$

$$G(Q(t), a(t), c(t)) = (1 - c(t))(a(t) - Q(t))$$

# Etude de l'équation différentielle

- Composante par composante, l'équation différentielle est

$$\frac{dq_{i,\ell}}{dt} = -q_{i,\ell}[h_{i,\ell}(Q) - \bar{h}_i(Q)], \quad 1 \leq \ell \leq m_i, 1 \leq i \leq n$$

- avec

$$\bar{h}_i(Q) = \sum_s q_{i,s} h_{i,s}(Q)$$

$$h_{i,\ell}(Q) = E \left[ C_j \mid \begin{array}{l} 1 \leq j \leq n, j \neq i \text{ utilise la stratégie } q_j \\ \text{et } i \text{ utilise la stratégie } \ell \end{array} \right]$$

- I.e. : **une dynamique de réplication**

# Théorie évolutionnaire des jeux

Dynamique de réplication :  $\frac{dq_{i,\ell}}{dt} = -q_{i,\ell}[h_{i,\ell}(Q) - \bar{h}_i(Q)]$

## Théorème [Folk Theorem]

- Les coins de  $K$  sont stationnaires.
- Les équilibres de Nash sont stationnaires.
- Tous les points stationnaires qui ne sont pas des équilibres de Nash sont instables.
- Tous les coins de  $K$  qui sont des équilibres de Nash stricts (en stratégies pures) sont asymptotiquement stables.

Cela signifie :

1. peut-être qu'on converge, peut-être pas ... (dans le cas général)
2. si l'on converge, on converge vers un N.E.
3. N.E. pur + strict implique localement asymptotiquement stable.



Cela signifie :

1. peut-être qu'on converge, peut-être pas ... (dans le cas général)
2. si l'on converge, on converge vers un N.E.
3. N.E. pur + strict implique localement asymptotiquement stable.

Cela signifie :

1. peut-être qu'on converge, peut-être pas ... (dans le cas général)
2. si l'on converge, on converge vers un N.E.
3. N.E. pur + strict implique localement asymptotiquement stable.

Cela signifie :

1. peut-être qu'on converge, peut-être pas ... (dans le cas général)
2. si l'on converge, on converge vers un N.E.
3. N.E. pur + strict implique localement asymptotiquement stable.

## Etape 3 : Garantir la convergence

# Garantir la convergence

Théorème [extension de [Sastry et al 94]]

Soit  $F : K \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction différentiable positive ou nulle telle que pour des constantes  $w_i > 0$ ,

$$\forall Q, \forall i, \forall \ell, \frac{\partial F}{\partial q_{i,\ell}}(Q) = w_i \times h_{i,\ell}(Q) \quad (1)$$

Alors, il y a convergence vers un N.E.

Pourquoi ?

# Garantir la convergence

Théorème [extension de [Sastry et al 94]]

Soit  $F : K \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction différentiable positive ou nulle telle que pour des constantes  $w_i > 0$ ,

$$\forall Q, \forall i, \forall \ell, \frac{\partial F}{\partial q_{i,\ell}}(Q) = w_i \times h_{i,\ell}(Q) \quad (1)$$

Alors, il y a convergence vers un N.E.

Preuve :

$$\frac{d}{dt} F(Q(t)) \leq 0$$

Pourquoi ?

La fonction

$$F(Q) = \sum_{k=1}^m \left[ \frac{(\sum_{j=1}^N q_{j,k} w_j)^2}{2} + \sum_{j=1}^N q_{j,k} w_j^2 \left(1 - \frac{q_{j,k}}{2}\right) \right]$$

vérifie  $\frac{\partial F}{\partial q_{i,\ell}}(Q) = w_i \times h_{i,\ell}(Q)$

La fonction

$$F(Q) = \sum_{k=1}^m \left[ \frac{(\sum_{j=1}^N q_{j,k} w_j)^2}{2} + \sum_{j=1}^N q_{j,k} w_j^2 \left(1 - \frac{q_{j,k}}{2}\right) \right]$$

vérifie  $\frac{\partial F}{\partial q_{i,\ell}}(Q) = w_i \times h_{i,\ell}(Q)$

Corollary

*Il y a convergence vers un N.E. dans ce cas*



1. La dynamique converge (faiblement) vers la solution d'une dynamique de réplication
2. La dynamique de réplication converge
3. Les limites ne peuvent être que des N.E.
4. La dynamique apprend donc bien les N.E.

1. La dynamique converge (faiblement) vers la solution d'une dynamique de réplication
2. La dynamique de réplication converge
3. Les limites ne peuvent être que des N.E.
4. La dynamique apprend donc bien les N.E.

1. La dynamique converge (faiblement) vers la solution d'une dynamique de réplication
2. La dynamique de réplication converge
3. Les limites ne peuvent être que des N.E.
4. La dynamique apprend donc bien les N.E.

1. La dynamique converge (faiblement) vers la solution d'une dynamique de réplication
2. La dynamique de réplication converge
3. Les limites ne peuvent être que des N.E.
4. La dynamique apprend donc bien les N.E.

1. La dynamique converge (faiblement) vers la solution d'une dynamique de réplication
2. La dynamique de réplication converge
3. Les limites ne peuvent être que des N.E.
4. La dynamique apprend donc bien les N.E.

# Travaux en cours : ce problème

- Propriétés des équilibres de Nash :
  - Purs ou mixtes ?
- Temps de convergence :
  - Etant donné  $\epsilon$ , quel temps faut-il pour atteindre un  $\epsilon$ -équilibre de Nash ?
- Extension au cas général :
  - Existe t'-il une fonction de Liapunov  $F$  dans le cas général ?
  - Autre argument qu'un argument via une fonction de Liapunov ?

- Résultats de convergence pour d'autres problèmes ?
  - Problème d'ordonnancement avec différentes fonctions de coût.
  
- D'autres dynamiques ?
  - dynamique stochastique ?
  - autres algorithmes d'apprentissage ?

# Dérivée de $F(Q(t))$ : Première considération

Lemma

$$\sum_{\ell} \sum_{s} q_{i,\ell} q_{i,s} h_{i,\ell} h_{i,s} = \left( \sum_{\ell} q_{i,\ell} h_{i,\ell} \right)^2$$



# Dérivée de $F(Q(t))$ : Calculons

$$\begin{aligned}\frac{dF(Q(t))}{dt} &= \sum_{i,\ell} \frac{\partial F}{\partial q_{i,\ell}} \frac{dq_{i,\ell}}{dt} \\ &= - \sum_{i,\ell} \frac{\partial F}{\partial q_{i,\ell}}(Q) q_{i,\ell} \sum_s q_{i,s} [h_{i,\ell}(Q) - h_{i,s}(Q)] \\ &= - \sum_{i,\ell} w_i h_{i,\ell}(Q) q_{i,\ell} \sum_s q_{i,s} [h_{i,\ell}(Q) - h_{i,s}(Q)] \\ &= - \sum_i w_i \sum_\ell \sum_s q_{i,\ell} q_{i,s} [h_{i,\ell}(Q)^2 - h_{i,\ell}(Q) h_{i,s}(Q)] \\ &= - \sum_i w_i [\sum_\ell q_{i,\ell} (\sum_s q_{i,s}) h_{i,\ell}(Q)^2 - (\sum_\ell q_{i,\ell} h_{i,\ell})^2] \\ &= - \sum_i w_i [\sum_\ell q_{i,\ell} h_{i,\ell}(Q)^2 - (\sum_\ell q_{i,\ell} h_{i,\ell})^2] \\ &\leq 0\end{aligned}$$

by Jensen's Lemma.

◀ back

- Dynamique de la forme :

$$Q(t+1) = Q(t) + bG(Q(t), a(t)).$$

où

- $a(t) = (a_1(t), \dots, a_n(t))$  machines choisies au temps  $t$ .
  - $c(t) = (c_1(t), \dots, c_n(t))$  coûts correspondants.
  - $G(\cdot)$  la dynamique donnée par l'équation de mise à jour précédente.
- Donc

$$\begin{aligned} E[Q(n)] &= E[Q(0)] + \sum_{t=1}^n E[Q(t+1) - Q(t)] \\ &= Q(0) + \sum_{t=1}^n bE[G(Q(t), a(t))] \\ &= Q(0) + \sum_{t=1}^n bg(Q(t)) \end{aligned}$$

où  $g(Q(t)) = E[G(Q(t), a(t))]$

(le choix de  $a(t)$  est fait selon  $Q(t)$ )

- Considérons la fonction  $X(t)$  solution du problème de Cauchy  $X(0) = Q(0) = Q^b(0)$ ,  $\frac{dX}{dt} = g(X(t))$ .
- Posons  $\epsilon(t) = \|E[Q^b(t)] - X(t)\|$
- Supposons  $g(\cdot)$   $\Lambda$ -lipschitienne :  $\|g(x) - g(x')\| \leq \Lambda\|x - x'\|$
- 

$$\begin{aligned}
 \epsilon((n+1)b) &= \|bg(Q^b(nb)) + Q^b(nb) \\
 &\quad - \int_{nb}^{(n+1)b} g(X(t'))dt' - X(nb)\| \\
 &\leq \epsilon(nb) + b\|g(Q^b(nb)) - g(X(nb))\| \\
 &\quad + \|bg(X(nb)) - \int_{nb}^{(n+1)b} g(X(t'))dt'\| \\
 \epsilon((n+1)b) &\leq (1 + \Lambda b)\epsilon(nb) + e(nb)
 \end{aligned}$$

avec  $e(nb) = \|\int_{nb}^{(n+1)b} g(X(t'))dt' - bg(X(nb))\| \leq M\frac{b^2}{2}$  avec  $M = \sup_t g^{(2)}(t) = \sup_t \frac{dg(X(t))}{dt}$ .

- Lemme de Gronwall ...

$$\begin{aligned}\epsilon(nb) &\leq e^{\Lambda nb} \epsilon(0) + M \frac{b^2}{2} \frac{(1+\Lambda b)^n - 1}{\Lambda b} \\ &\leq M \frac{b^2}{2} \frac{e^{\Lambda nb} - 1}{\Lambda b}\end{aligned}$$

puisque  $\epsilon(0) = 0$  et  $(1+u)^n \leq e^{nu}$ , avec

- Sur notre dynamique ...

- 

$$\epsilon(t) \leq b\Lambda(e^{\Lambda t} - 1)$$

avec  $\Lambda = 2(nAW + B)$ ,  $A = \max_j \alpha_j$ ,  $W = \max_j w_j$ ,  
 $B = \max_j \beta_j$ .

[Retour](#)

# Exemple de cette dynamique

- 2 machines,
- 5 tâches  $\{w_1 = 1, w_2 = 2, w_3 = 3, w_4 = 4, w_5 = 1\}$

# Exemple de cette dynamique

- 2 machines,
- 5 tâches  $\{w_1 = 1, w_2 = 2, w_3 = 3, w_4 = 4, w_5 = 1\}$

Au top  $t$ ,

$$q_1(t) = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} \end{pmatrix}$$

# Exemple de cette dynamique

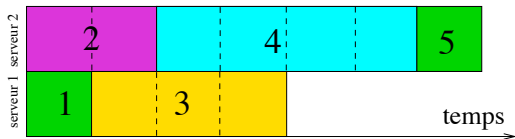
- 2 machines,
- 5 tâches  $\{w_1 = 1, w_2 = 2, w_3 = 3, w_4 = 4, w_5 = 1\}$

Au top  $t$ ,

$$q_1(t) = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} \end{pmatrix}$$

Au top  $t + 1$ ,

$$a_1 = 1$$



# Exemple de cette dynamique

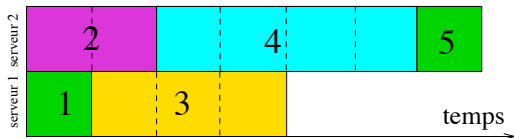
- 2 machines,
- 5 tâches  $\{w_1 = 1, w_2 = 2, w_3 = 3, w_4 = 4, w_5 = 1\}$

Au top  $t$ ,

$$q_1(t) = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} \end{pmatrix}$$

Au top  $t + 1$ ,

$$\begin{aligned} a_1 &= 1 \\ c_1 &= 4/11 \\ r_1 &= 7/11 \end{aligned}$$





## Exemple de cette dynamique

- 2 machines,
- 5 tâches  $\{w_1 = 1, w_2 = 2, w_3 = 3, w_4 = 4, w_5 = 1\}$

Au top  $t$ ,

$$q_1(t) = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} \end{pmatrix}$$

Au top  $t + 1$ ,

$$\begin{aligned} a_1 &= 1 \\ c_1 &= 4/11 \\ r_1 &= 7/11 \end{aligned}$$

$$q_1(t + 1) =$$

$$\begin{pmatrix} \frac{2}{3} + br_1(1 - \frac{2}{3}) \\ \frac{1}{3} + br_1(0 - \frac{2}{3}) \end{pmatrix}$$

$$b = 0.1$$

# Exemple de cette dynamique

- 2 machines,
- 5 tâches  $\{w_1 = 1, w_2 = 2, w_3 = 3, w_4 = 4, w_5 = 1\}$

Au top  $t$ ,

$$q_1(t) = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} \end{pmatrix}$$

Au top  $t + 1$ ,

$$q_1(t + 1) \approx \begin{pmatrix} 0,68 \\ 0,32 \end{pmatrix}$$