Coloration bornée des graphes co-triangulés : inégalité de Berge-Tutte modulaire, borne-perfection et réplication

V. Jost

Laboratoire Leibniz-IMAG, 46 av Felix Viallet, 38031 Grenoble
vincent.jost@imag.fr

Une coloration b-bornée d'un graphe $G = (V, E)$ est une coloration des sommets de G dans laquelle chaque couleur est utilisée pour au plus b sommets [6]. Ce modèle est particulièrement utile quand on veut utiliser la coloration pour des applications dans le monde physique.

Par exemple, lors d'un dîner de Gala, on souhaite répartir des chercheurs autour de tables en évitant les inimitiés (contraintes de coloration) et en ne placant pas plus que $b = 10$ personne autour de chaque table (borne sur la taille des couleurs).

Des modèles équivalents ont été utilisés pour des problèmes d'ordonnancement sur machines parallèles avec contraintes d'incompatibilités [1,10]. Formellement nous étudions le problème suivant.

[ColB] Coloration bornée
Données : Un graphe G, deux entiers b et k.
Résultat : Est-ce que $\chi_b(G) \leq k$, *i.e.* est-ce qu'il existe une coloration de G en au plus k couleurs, chacune étant utilisée pour au plus b sommets ?

[ColB] est $\mathcal{NP}$ -complet puisqu'une coloration bornée est un certificat $\mathcal{NP}$ et que [ColB] contient Partition en triangles et Coloration comme sous-problèmes.

Theorem 1. *[8] [ColB] est polynomial si l'on se restreint aux compléments de graphes triangulés.*

Ce Théorème généralise le cas des compléments d'intervalles [5,10] et des splits graphes [2]. Il généralise aussi la polynomialité du problème de partition en triangles sur les graphes triangulés [3]. L'algorithme s'appuie sur une décomposition simpliciale canonique des graphes triangulés et utilise une technique de couplage maximum à plusieurs niveaux. En plus de l'algorithme, nous présentons une formule min-max qui complète le Théorème 1, ainsi qu'une description polyédrale inspirée de cette formule.

1 Inégalité de Berge-Tutte modulaire et borne-perfection

Appelons *nombre chromatique b-borné* de $\overline{G}$ (et notons $\overline{\chi}_b(G) = \chi_b(\overline{G})$, le nombre minimum de couleurs qu'il faut pour colorier le graphe $\overline{G}$, en utilisant chaque couleur au plus b fois. De manière équivalente $\overline{\chi}_b(G)$ est le nombre minimum de cliques de taille au plus b qu'il faut pour partitionner les sommets de G.

Pour $S \subseteq V$, notons $C_1(S), C_2(S), \ldots$ les sous-ensembles de sommets des composantes connexes de $G[S]$. Définissons

$$\sigma_b(G) = \max_{S \subseteq V} \sum_i \left\lceil \frac{|C_i(S)|}{b} \right\rceil \tag{1}$$

Proposition 1. *[5] Pour tout graphe G et tout entier positif b,*

$$\overline{\chi}_b(G) \geq \sigma_b(G) \tag{2}$$

Cette borne donne une formule min-max pour de nombreuses classes de graphes pour lesquelles calculer $\overline{\chi}_b(G)$ est polynomial. Cela motive la définition des graphes *bornés-parfaits* pour lesquels l'inégalité (2) est satisfaite avec égalité pour tout b et pour tout sous-graphe induit.

Theorem 2. *Les graphes suivants sont bornés-parfaits. De plus, on peut trouver une $\overline{\chi}_b(G)$ coloration b-bornée de $\overline{G}$ en temps polynomial si l'on se restreint à l'une de ces classes.*

- ⋆ *G est un graphe triangulé [8]*
  - *G est une graphe d'intervalles [10,5]*
  - *G est split graphe [2]*
- ⋆ *G est parfait et sans-K_4 [5,7]*
  - *G est biparti*
- ⋆ *G est parfait et complément de sans-$K_{1,3}$ [4,6,7,8]*
  - *G est complément d'un line-graphe de biparti*
  - *G est complément d'un graphe d'intervalles unitaires*

2 Réplication et *High-Multiplicity*

Un répliqué d'un graphe G est un graphe construit a partir de G en créant des "copies" de certains sommets. Les copies d'un même sommets sont reliées entre elles. Un facteur de réplication est une fonction $r : V \to \mathbb{N}$, qui indique pour chaque sommet combien de fois il est répliqué. Le graphe G répliqué avec le facteur r est noté (G, r). Le sous-graphe induit est un cas particulier qui consiste à prendre $r : V \to \{0, 1\}$.

Theorem 3. *[8] Un graphe G est borné-parfait pour tout répliqué si et seulement s'il est triangulé.*

Une application de la replication est illustrée dans un problème de production par lots [9].

[PCliqBrep] Partition en cliques bornées avec réplication
Données : Un graphe répliqué G, des facteurs de réplications $r : V \to \mathbb{N}$, deux entiers b et k.
Résultat : Est-ce qu'il existe une partition du graphe (G, r) en k cliques de taille au plus b ?

Ce problème contient [ColB] et est donc $\mathcal{NP}$ -dur. En revanche, il n'est pas connu pour être dans $\mathcal{NP}$. Le résultat suivant étend le cas des graphes d'intervalles [9].

Theorem 4. *[8] [PCliqBrep] est polynomial pour les graphes triangulés.*

En général, la borne-perfection n'est pas préservée par réplication, pas plus que la polynomialité du problème de partition en cliques de taille au plus b :

Theorem 5. *[8] [PCliqBrep] est fortement $\mathcal{NP}$ -dur pour les graphes bipartis.*

Références

1. B.S. Baker and E.G. Coffman (1996). *Mutual exclusion scheduling.*, Theor. Comput. Sci., 162,2, 225-243.
2. H.L. Bodlaender and K. Jansen (1995). *Restrictions of graph partition problems. Part I.*, Theor. Comput. Sci., 148,1, 93-109.
3. E. Dahlhaus and M. Karpinski (1998). *Matching and multidimensional matching in chordal and strongly chordal graphs.*, Discrete Appl. Math., 84,1-3, 79-91.
4. D. de Werra (1985). *Some uses of hypergraphes in timetabling.*, Asia-Pacific J. Oper. Res., 2, 2-12.
5. G. Finke, V. Jost, M. Queyranne and A. Sebő (2004). *Batch processing with interval graph compatibilities between tasks*, Cahier No. 108, Laboratoire Leibniz, Grenoble.
6. F. Gardi (2005). *Ordonnacement avec exclusion mutuelle par un graphe d'intervalle ou une classe apparentée : complexité et algorithmes*, Thèse de doctorat, Laboratoire d'informatique fondamentale - Faculté des sciences de Luminy, Marseille.
7. P. Hansen, A. Hertz, J. Kuplinsky (1993). *Bounded vertex colorings of graphs*, Discrete Mathematics, 111, 305-312.
8. V. Jost (2005). *Bounded coloring in co-chordal graphs.*, En préparation.
9. L. Kangbok and S.Y. Chang and Y. Hong (2004). *Continuous slab caster scheduling and interval graphs*, Production Planning and Control, 15,5,495-501.
10. C.H. Papadimitriou and M. Yannakakis (1979). *Scheduling interval-ordered tasks.*, SIAM J. Comput.,8,405-409.